### ТЕОРИЯ ИГР. ПОИСК ВЫИГРЫШНОЙ СТРАТЕГИИ

Для решения 19 задания необходимо вспомнить следующие темы и понятия:

**Выигрышная стратегия**

* для того чтобы найти выигрышную стратегию в несложных играх, достаточно использовать метод перебора всех возможных вариантов ходов игроков;
* для решения задач 19 задания чаще всего для этого применяется **метод построения деревьев**;
* если от каждого узла дерева отходят две ветви, т.е. возможные варианты хода, то такое дерево называется **двоичным**(если из каждой позиции есть три варианта продолжения, дерево будет троичным).

**Выигрышные и проигрышные позиции**

* все позиции в простых играх делятся на выигрышные и проигрышные;
* **выигрышная позиция** – это такая позиция, в которой игрок, делающий первый ход, обязательно выиграет при любых действиях соперника, если не допустит ошибки; при этом говорят, что у данного игрока есть **выигрышная стратегия** – алгоритм выбора очередного хода, позволяющий ему выиграть;
* если игрок, делающий первый ход, находится в **проигрышной позиции**, то он обязательно проиграет, если ошибку не сделает его оппонент; в этом случае говорят, что у данного игрока **нет выигрышной стратегии**; таким образом, общая стратегия игры состоит в том, чтобы своим ходом создать проигрышную позицию для оппонента;
* выигрышные и проигрышные позиции характеризуются так:
* позиция, из которой все возможные ходы ведут в выигрышные позиции – **проигрышная**;
* позиция, из которой хотя бы один из последующих возможных ходов ведет в проигрышную позицию — **выигрышная**, при этом стратегия игрока состоит в том, чтобы **перевести игру в эту проигрышную** (для оппонента) **позицию**.

**Кто выиграет при стратегически правильной игре?**

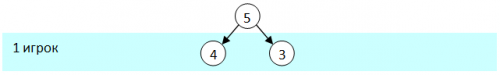
* для того чтобы определить, какой из игроков выиграет при стратегически правильной игре, необходимо ответить на вопросы:
* Может ли какой-либо из игроков выиграть, независимо от ходов других игроков?
* Что должен сделать игрок с выигрышной стратегией первым ходом, чтобы он смог выиграть, независимо от действий ходов игроков?

Рассмотрим пример:

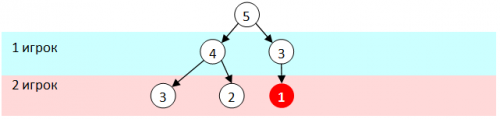
**Игра:** в кучке лежит 5 спичек; играют два игрока, которые по очереди убирают спички из кучки; условие: за один ход можно убрать 1 или 2 спички; выигрывает тот, кто оставит в кучке 1 спичку

Решение:

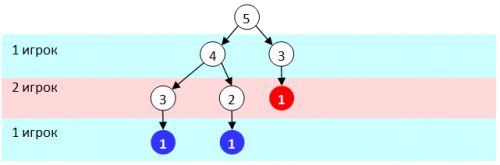
* Будем использовать метод построения дерева. Первый играющий может убрать одну спичку (в этом случае их останется 4) или сразу 2 (останется 3), эти два варианта отобразим при помощи дерева:

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/2017/07/1-2.png)

* если первый игрок оставил 4 спички, второй может своим ходом оставить 3 или 2; а если после первого хода осталось 3 спички, второй игрок может выиграть, взяв две спички и оставив одну:

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/2017/07/1_1-2.png)

* если осталось 3 или 2 спички, то 1-ый игрок (в обеих ситуациях) выиграет своим ходом:

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/2017/07/1_11-2.png)  
проанализируем стратегию игры:

* если первый игрок своим первым ходом взял две спички, то второй сразу выигрывает; если же он взял одну спичку, то своим вторым ходом он может выиграть, независимо от хода второго игрока;
* итак, убрав всего одну спичку первым ходом, 1-ый игрок всегда может выиграть на следующем ходу;
* тогда как второй игрок не может выиграть, независимо от действий первого: потому что, если первый игрок сначала убрал одну спичку, второй всегда проиграет.

**Ответ:** при правильной игре (стратегии игры) выиграет первый игрок; для этого ему достаточно своим первым ходом убрать одну спичку.

## Решение 19, 20, 21 заданий ЕГЭ по информатике

[Задание демонстрационного варианта 2021 года ФИПИ](https://labs-org.ru/ege-demo2021" \l "task19/" \t "_blank)

### ИГРА С ДВУМЯ КУЧАМИ КАМНЕЙ ИЛИ ТАБЛИЧКА

19\_8: **Разбор задания 19:**

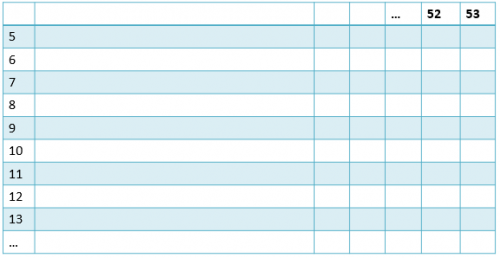
Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает **Петя**. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) **один камень** или увеличить количество камней в куче **в два раза**. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится **не менее 59**. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет **59** или больше камней.  
В начальный момент в первой куче было **5** камней, во второй куче – S камней; 1 ≤ S ≤ 53.

Задание 19 ЕГЭ.  
Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение S, когда такая ситуация возможна.  
    
Задание 20 ЕГЭ.  
Найдите минимальное значение S, при котором у **Пети есть выигрышная стратегия**, причём одновременно выполняются два условия:  
− Петя не может выиграть за один ход;  
− Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

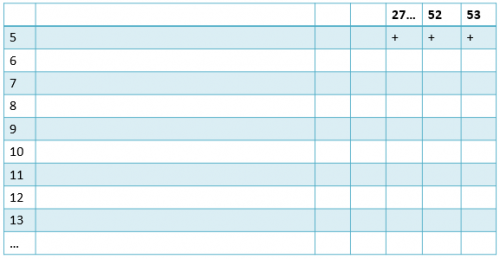
Задание 21 ЕГЭ.  
Найдите два значения S, при которых одновременно выполняются два условия:  
– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;  
– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.  
Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

 Решение:

* Нарисуем таблицу, в первом столбце которой будем откладывать количество камней в первой куче, а в первой строке — количество камней во второй куче. Получим матрицу. Поскольку в первой куче количество начинается с **5**, то это и будет первым значением в таблице. Во второй куче начнем с наибольшего возможного числа — **53**. Таблица пригодится для решения заданий 20 и 21:

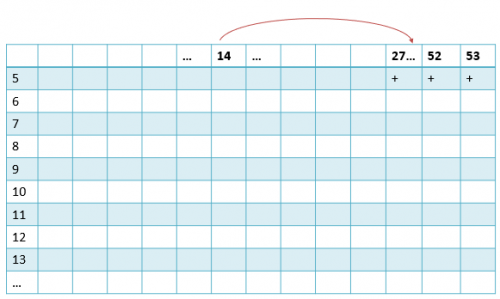
[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/izobrazhenie_2021-01-07_124649.png)

* Для начала найдем все выигрышные позиции для первой строки таблицы, т.е. для первого хода. Обозначим их плюсами (+):

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/0-40.png)

Выигрышные позиции для первой строки ищем по принципу увеличения количества камней S в 2 два раза: 5 + S\*2 >=59. Получим S>=27

* Для того, чтобы получить наименьшее значение S, в качестве первого хода Пети необходимо увеличивать в два раза вторую кучу. Т.е. для решения задания необходимо найти такое наименьшее S, при котором Петя походил неверно, и попал своим ходом в выигрышную позицию для своего соперника, т.е. в ячейку с плюсом:

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/1-17.png)

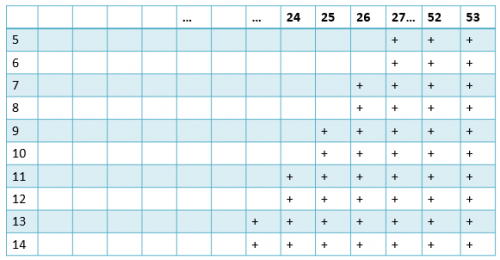
S = 14

1 ход Петя: 14\*2 = (5,28)

2 ход Ваня: 28\*2 = (5,56), Сумма = 61, Выигрыш!

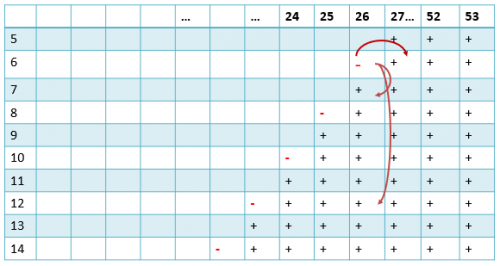
**Ответ:**14  
    
✎ Задание 20:

* Проанализируем таблицу, и для каждой строки найдем выигрышные позиции с одного хода. Т.е. которые позволят игроку, оказавшемуся «на них», выиграть за один ход (получить суммарно 59 и более камней):

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/izobrazhenie_2021-01-07_131858.png)

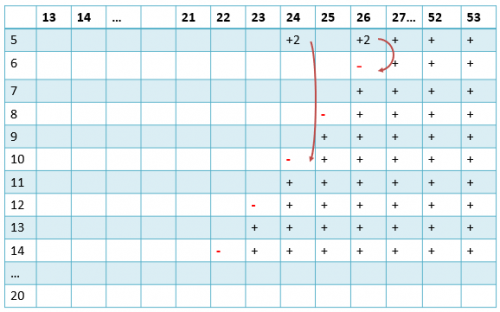
При заполнении таблицы выигрышными позициями можно проследить закономерность «узора», а заполнять позиции по аналогии.

* Найдем проигрышные позиции: те, которые ведут только в выигрышные позиции для соперника (ведут только в плюсы)

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/izobrazhenie_2021-01-07_132529.png)

Проигрышные позиции: (6,26) (8,25) (10,24) (12,23) (14,22)

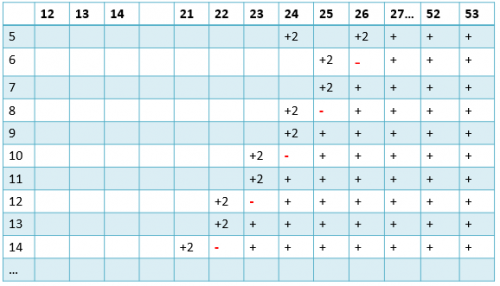
* В задании требуется найти минимальное S, котором выиграет Петя, но выиграет он НЕ первым своим ходом, а вторым. То есть в нашем случае необходимо найти S, которое может перевести соперника в проигрышную позицию. То есть в минус. Для первой строки (так как первым будет ходить Петя) таких значений два:

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/izobrazhenie_2021-01-07_141840.png)

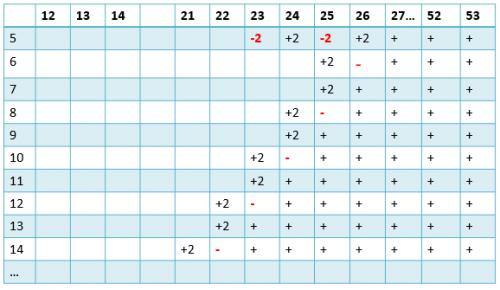
* Наименьшее S = **24**

**Ответ:**24  
   
✎ Задание 21:

* Для решения этого задания найдем выигрышные позиции со второго хода, т.е. которые могут перевести соперника в проигрышную позицию (с минусом):

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/izobrazhenie_2021-01-07_142358.png)

* Чтобы выиграл Ваня, но выиграл не первым ходом, а вторым, необходимо, чтобы Петя находился в такой позиции, которая ведет его только на выигрышные позиции со второго хода:

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/izobrazhenie_2021-01-07_142848.png)

**Ответ:**23 25

19\_9: **Разбор задания 19 с сайта К. Полякова, № 49:**

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат **две** кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает **Петя**.  
За один ход игрок может **убрать** из одной из куч **один** камень или **уменьшить** количество камней в куче **в два раза** (если количество камней в куче нечётно, остаётся на 1 камень больше, чем убирается).

Например, пусть в одной куче 6, а в другой 9 камней; такую позицию мы будем обозначать (6, 9). За один ход из позиции (6, 9) можно получить любую из четырёх позиций: (5, 9), (3, 9), (6, 8), (6, 5).

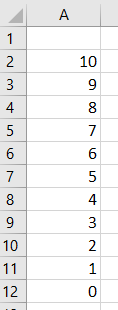
Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не более ***20***. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший позицию, в которой **в кучах будет 20 или меньше камней**. В начальный момент в первой куче было 10 камней, во второй куче – S камней, **S > 10**.

Задание 19 ЕГЭ.  
Найдите значение S, при котором Ваня выигрывает своим первым ходом при любой игре Пети?  
    
Задание 20 ЕГЭ.  
Найдите минимальное и максимальное значение S, при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:  
− Петя не может выиграть за один ход;  
− Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.  
Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.  
    
Задание 21 ЕГЭ.  
Найдите значение S, при котором одновременно выполняются два условия:  
– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;  
– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

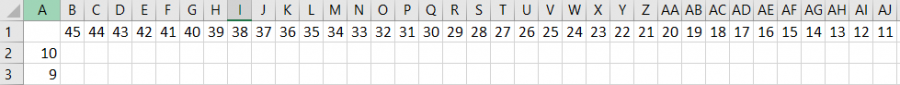
 Решение (Excel):

✎ Задание 19:

* В столбце А отложим значения — количество камней в первой куче. Начнем с ячейки А2, в которую внесем начальное количество камней, т.е. **10**. Автозаполнением продлим значения вниз до **0**:

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/izobrazhenie_2021-01-23_135522.png)

* В строке **1** таблицы (начиная с ячейки B1) отложим значения для второй кучи. Поскольку в задании говорится, что победа будет достигнута при S<=20, и достигнуть этого значения более сильной командой можно уменьшив кол-во камней во второй куче в два раза, начиная с числа **40**: **40/20**. То есть возьмем значение больше 40, примерно **45**. Используем автозаполнение до значения **11**:

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/izobrazhenie_2021-01-23_140141.png)

* Из двух команд, которые могут выполнять игроки, выберем наиболее сильную, т.е. благодаря которой можно быстрее достичь выигрышного диапазона и попасть в значения **S<=20**. Это команда уменьшения количества камней в два раза, т.е. /2.
* Для каждой из ячеек полученной таблицы рассчитаем значение, полученное в результате уменьшения в два раза той кучи камней, в которой большее количество камней (так как это даст меньший результат). Например, для ячейки С5, в которой игрок имеет в первой куче **7** камней, а во второй куче **44** камня, мы бы выполнили действие **44/2+7**. Т.е. уменьшили вдвое вторую кучу, т.к. в ней больше камней. Еще необходимо обращать внимание на четность и нечетность значений (в Excel это функция ЕНЕЧЁТ — возвращает ИСТИНУ, если значение нечетно).
* Чтобы автоматизировать процесс необходимо использовать формулу, в которой найдем максимальное значение из двух вариантов:

Минимальное из

(ЕСЛИ(ЕНЕЧЁТ(1-я куча) то (1-я куча+1)/2+2-я куча,

иначе 1-я куча/2+2-я куча);

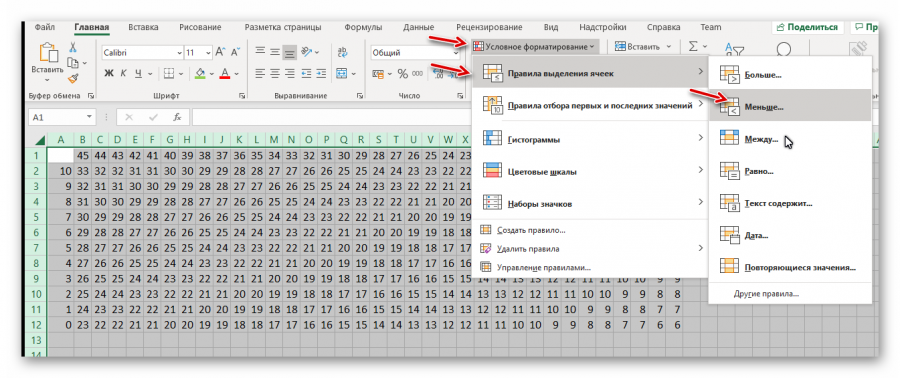
ЕСЛИ(ЕНЕЧЁТ(2-я куча) то (2-я куча+1)/2+1-я куча,

иначе 2-я куча/2+1-я куча)).

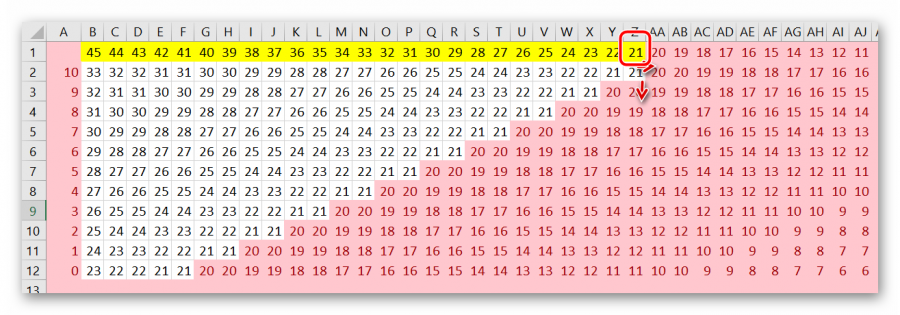
* Выразив это в формуле Excel, получим результат, который внесем в ячейку B2:

= МИН(ЕСЛИ(ЕНЕЧЁТ($A2);($A2+1)/2+B$1;$A2/2+B$1);ЕСЛИ(ЕНЕЧЁТ(B$1);(B$1+1)/2+$A2;B$1/2+$A2))

* Здесь знак $ будем использовать для фиксации столбца А и строки 1 при копировании формулы.
* Скопируем формулу на всю таблицу.
* Выделим всю таблицу и используем Условное форматирование для выделения тех значений, которые попадают в выигрыш (**<21**):

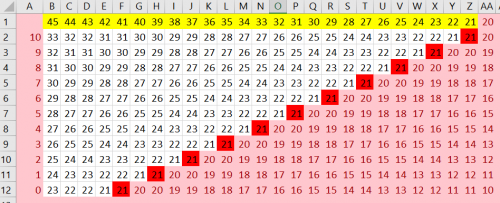
[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/izobrazhenie_2021-01-23_141710.png)

* Выделенные значения — это значения, которые можно получить в сумме двух куч, выполнив ход из данной ячейки. И по сути, это и есть выигрышные позиции с 1 хода.
* Далее следуем логике рассуждения: Ваня сможет выиграть своим первым ходом в том случае, если Петя оказывается РЯДОМ с выигрышной позицией, и любой его ход попадает ТОЛЬКО в выигрышные позиции для Вани (в выделенную область). Это позиция при **S = 21**:

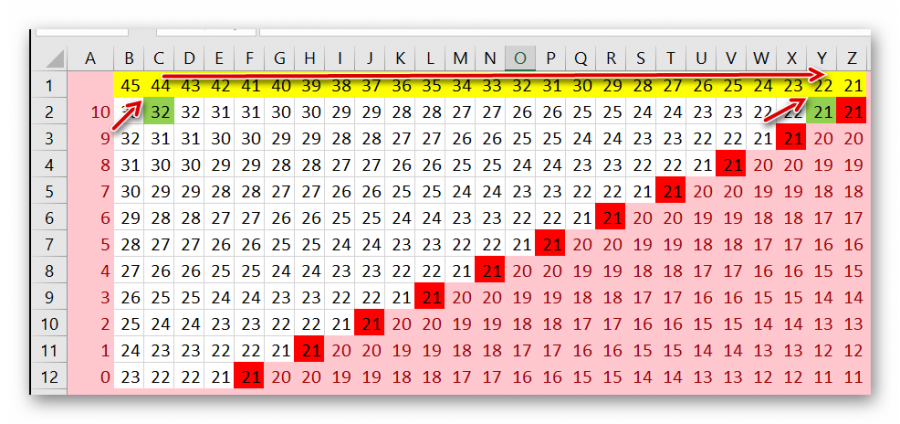
[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/izobrazhenie_2021-01-23_142501.png)

**Ответ:** 21  
✎ Задание 20:

* Продолжаем работать с той же таблицей, что и в задании **19**. Выделим все проигрышные позиции (из которых можно походить только в выигрышные позиции для соперника, т.е. в выделенные ячейки):

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/izobrazhenie_2021-01-23_142803.png)

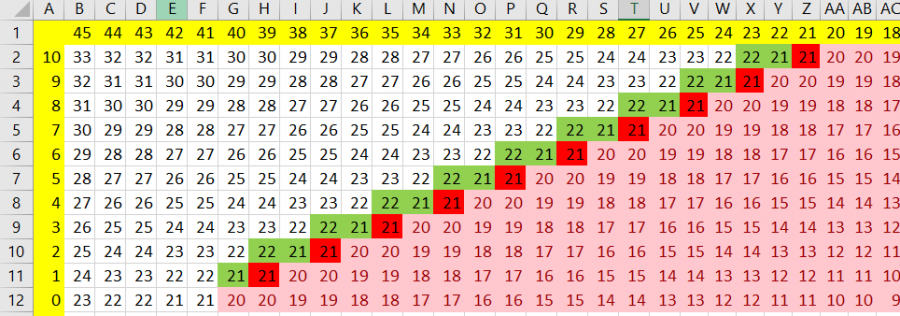
* Петя может выиграть свои вторым ходом, если он не может выиграть первым ходом, но может выполнить ход в позицию, проигрышную для соперника (в ячейку, выделенную красным). Такие позиции назовем выигрышные позиции со второго хода. Найдем минимальное и максимальное значение S при таком первом ходе Пети:

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/izobrazhenie_2021-01-23_143107.png)

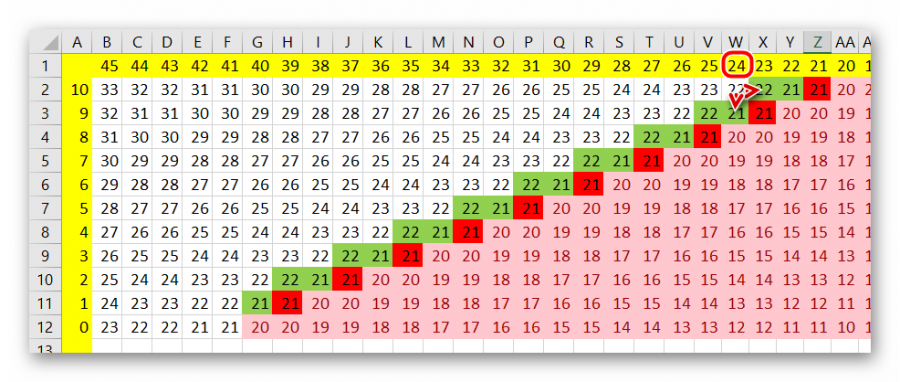
При **S=44** Пете необходимо уменьшить 2-ю кучу вдвое (44/2 = 22), чтобы оказаться в проигрышной позиции для соперника.

**Ответ:** 22 44  
    
✎ Задание 21:

* Выделим все такие выигрышные позиции со второго хода:

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/izobrazhenie_2021-01-23_143414.png)

* Далее придерживаемся следующей логики: Ваня сможет выиграть свои первым или вторым ходом, но при этом не гарантированно первым ходом, если у Пети будет возможность выполнить ходы только в позиции выигрышные со второго хода. Найдем такое S:

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/izobrazhenie_2021-01-23_143751.png)

При **S = 24** Петя сможет уменьшить кучи на один камень, и тогда оказывается в выделенной зеленой области — выигрышные позиции со второго хода для Вани, либо уменьшить количество камней вдвое, и тогда Ваня оказывается в выигрышной позиции с первого хода (розовая область).

**Ответ:** 24

19\_7: **Разбор задания 19 (26) с экзамена ЕГЭ 2020г. (со слов учащегося):**

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. На табличке написаны два значения. Оба игрока в свой ход могут заменить одно из значений на сумму обеих (по своему выбору). Первый ход делает Петя. Игра считается законченной когда сумма обеих значений равняется не меньше 56. То есть **выигрывает игрок, получивший 56 или более в сумме**. Начальное значение **(10, S)**.

Задание 19 ЕГЭ.  
Найдите максимальное S при котором Петя **не** может выиграть первым ходом.  
    
Задание 20 ЕГЭ.  
У кого из игроков есть выигрышная стратегия при начальном значении **(9, 15)**.  
    
Задание 21 ЕГЭ.  
У кого из игроков есть выигрышная стратегия при начальном значении **(3,7)**? Опишите эту стратегию и изобразите дерево всех возможных партий при этой стратегии.

[Типовые задания для тренировки](https://labs-org.ru/ege-demo2021" \l "task19" \t "_blank)

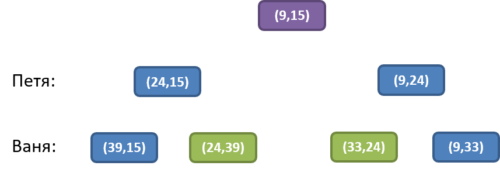
 Решение:

* **Задание 19.**  
  Максимальное S при котором Петя НЕ может выиграть своим первым ходом **S = 22**. Петя проиграет, если в сумме получится **55 и меньше**. Первое значение = 10, необходимо найти второе значение, при этом максимальное. Схематично отобразим варианты ходов:

(10,22) - ход Пети - (10+22, 22) - итог суммы обеих значений таблички: 32 + 22 = **54** (<56)

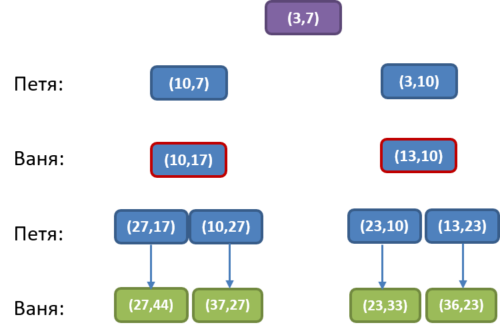
Для того, чтобы сделать сумму большей, Петя заменит первое значение на сумму, так как оно меньше второго значения (10<22)

* **Задание 20.**  
  В начальной позиции (9, 15) выигрышная стратегия есть **у Вани**. Для себя отобразим схематично выигрышную партию Вани:

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/1-16.png)

Зеленым цветом выделены выигрышные ходы.

* **Задание 21.**  
  В начальной позиции (3, 7) выигрышная стратегия есть **у Вани**. Изобразим дерево всех возможных партий при этой стратегии (раз говорится "при этой стратегии" имеем в виду, выигрышную стратегию Вани):

[[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/2-5.png)](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/2-5.png)

Дерево для выигрышной стратегии Вани: для Вани отображены только ходы по стратегии, для Пети - все возможные ходы. Зеленым цветом - выигрышный ход, красная обводка - ход по стратегии.

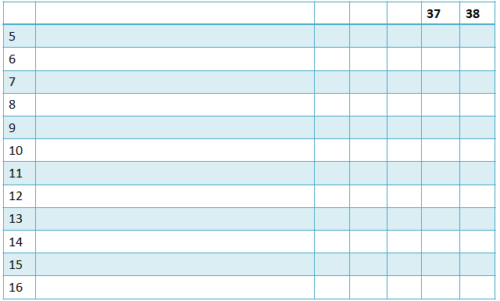
19\_6: **Разбор задания 19 с сайта К. Полякова (до 2021 был № 31):**

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) **два камня** или **увеличить количество камней в куче в два раза**. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится **не менее 44**.  
Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 44 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было **5 камней**, во второй куче – **S** камней; **1 ≤ S ≤ 38**.   
Задание 19 ЕГЭ.  
При каких S: **1а)** Петя выигрывает первым ходом; **1б)** Ваня выигрывает первым ходом?  
    
Задание 20 ЕГЭ.  
Назовите одно любое значение S, при котором Петя может выиграть своим вторым ходом.  
    
Задание 21 ЕГЭ.  
Назовите значение S, при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

**Решение:**

* Нарисуем таблицу, в первом столбце которой будем откладывать количество камней в первой куче, а в первой строке - количество камней во второй куче. Получим матрицу. Поскольку в первой куче количество начинается с **5**, то это и будет первым значением в таблице. Во второй куче начнем с наибольшего возможного числа - **38**:

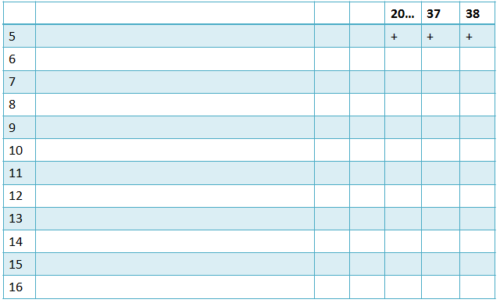
[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/000-66.png)  
   
Задание 19 а):

* Далее будем рассуждать так: Петя может выиграть первым ходом, выполнив команду **\*2** (увеличить количество камней в куче в два раза), если вместо S (кол-во камней во второй куче), мы будем изменять значение, начиная от **20**, до последнего возможного по условию значения **38**:

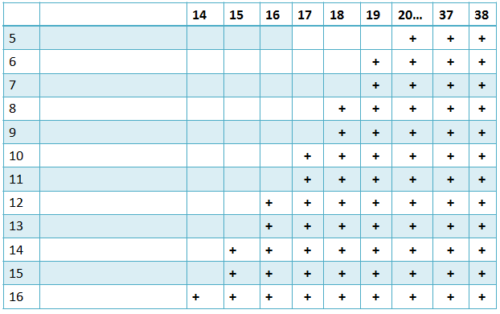
5 + 20\*2 = 45 (>44)

\* 5 - кол-во камней в первой куче, оно не меняется по условию

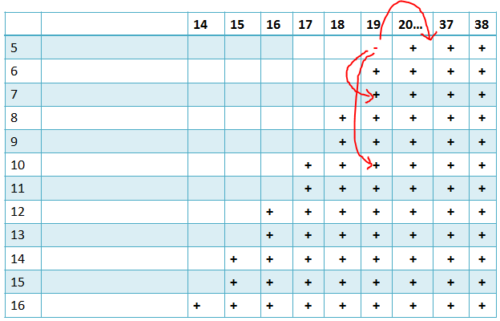
* Соответственно, все значения большие 20 дадут в результате число большее **44**. Укажем это в таблице. + означает выигрышную позицию с первого хода:

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/00-16.png)  
**Ответ 1 а)**: S = [20;38] (На ЕГЭ пояснить ходы, например: (5; 20) -> (Ход Пети)-> (5;40); 40 + 5 = 45)  
    
Задание 19 б):

* Поскольку Ваня будет ходить вторым, то необходимо поменять количество камней и в первой куче. Значит рассмотрим ситуации, что Петя мог бы ходить первым ходом в **(7;S)** и в **(10;S)**. Укажем, будут ли эти позиции выигрышные с одного хода: например (7;19) выигрышная позиция, т.к. игрок выполнит ход в (7;38) и выиграет (7 + 38 = 45). Соответственно, выигрышными являются и все позиции **(7;больше 19)**. Проанализируем таблицу, увеличивая количество камней в первой куче и выполняя поиск выигрышных позиций с одного хода:

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/0-37.png)

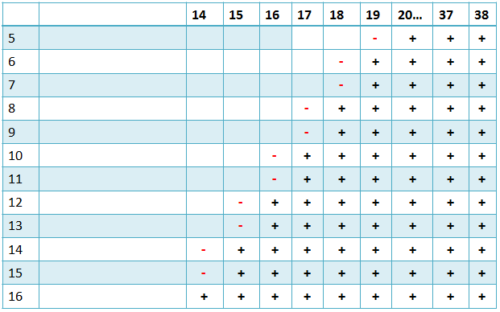
* Последующая логика рассуждений: Ваня может выиграть своим первым ходом, когда Петя своим первым ходом сможет ходить только в выигрышные позиции с первого хода (в +). Отметим такие позиции, учитывая, что это первый ход Пети, и кол-во камней в первой куче должно быть 5. Найденные позиции будут проигрышными позициями (-):

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/000-67.png)

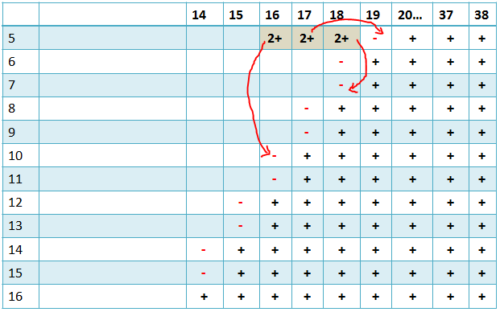
* Находим единственное такое значение - (5; 19). Т.е. S = 19.

**Ответ 1 б)**: S = 19 (На ЕГЭ пояснить ходы, например: (5; 19) -> (Ходы Пети): (5;21),(5;28);(7;19);(7;28). Везде следующим ходом выиграет Ваня, см. предыдущ. пункт)  
    
Задание 20:

* Обратим внимание, что в таблице, все образовавшиеся "уголки" являются проигрышными позициями (с 1-го хода): то есть если игрок, оказывается в такой позиции, то он может выполнить ход только в выигрышные позиции (то есть следующим ходом выиграет соперник):

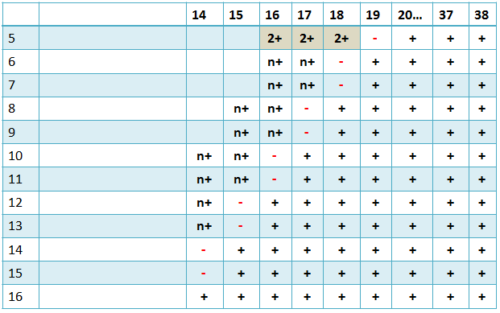
[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/00-17.png)

* Логика рассуждений: Петя сможет выиграть своим вторым ходом, когда своим первым ходом он попадет в проигрышную позицию, т.е. переведет соперника в проигрышную ситуацию. Такие значения: S = 16, 17 или 18. Назовем эти позиции выигрышными со второго хода (2+):

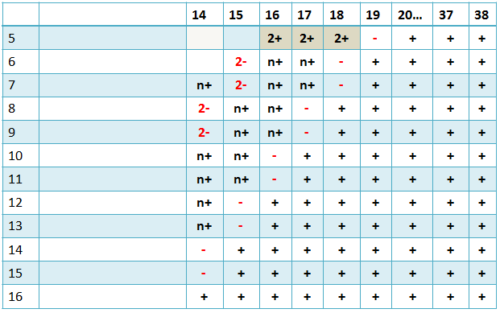
[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/01-5.png)

**Ответ 2:** S = 16, 17 или 18 (На ЕГЭ пояснить ходы, ссылаясь на объяснения в предыдущих пунктах)  
   
Задание 21:

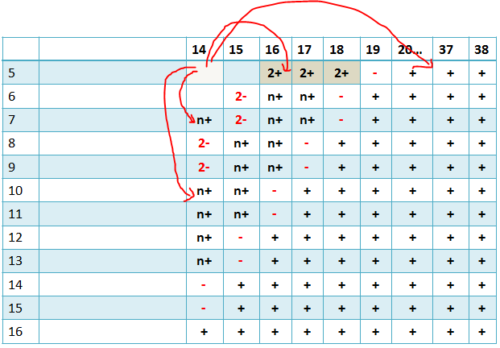
 Укажем в таблице также позиции, выигрышные с n-го хода: когда игрок может перевести соперника в проигрышную позицию:

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/000-68.png)

 Укажем также проигрышные позиции со второго хода: игрок, оказавшийся в такой позиции может выполнить ход только на выигрышные позиции (тогда соперник выиграет):

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/00-18.png)

 Логика рассуждений: Ваня сможет выиграть своим первым или вторым ходом, когда Петя своим первым ходом может попасть только либо в позицию выигрышную с первого хода (+), либо в позицию выигрышную со второго хода или n-го хода (2+). Это позиция при S = 14:

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/0-38.png)  
**Ответ 3:** S = 14 (На ЕГЭ пояснить ходы, ссылаясь на объяснения в предыдущих пунктах)

## Задания для тренировки 19, 20, 21 заданий ЕГЭ (взяты из КИМ и сборников прошлых лет)

### ИГРА С ОДНОЙ КУЧЕЙ КАМНЕЙ

19\_3: **Решение 19 (26). Демоверсия ЕГЭ 2018 информатика:**

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу **один**камень или увеличить количество камней в куче **в два раза**. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится **не менее 29**. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 29 или больше камней. В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 28.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока - значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии **не следует** включать ходы играющего по этой стратегии игрока, не являющиеся для него безусловно выигрышными, т.е. не являющиеся выигрышными независимо от игры противника.

Задание 19 ЕГЭ  
**а)** Укажите такие значения числа S, при которых Петя может выиграть в один ход.  
**б)** Укажите такое значение S, при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вани.

Задание 20 ЕГЭ  
Укажите два таких значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причем:  
- Петя не может выиграть за один ход;  
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.  
Для указанных значений S опишите выигрышную стратегию Пети.

Задание 21 ЕГЭ  
Укажите значение S, при котором:  
- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;  
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Вани. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии (в виде рисунка или таблицы). На ребрах дерева указывайте, кто делает ход; в узлах — количество камней в позиции

Дерево не должно содержать партий, невозможных при реализации выигрывающим игроком своей выигрышной стратегии. Например, полное дерево игры не является верным ответом на это задание.

**Решение:**

Задание 19.

* а) Петя может выиграть, если S = 15, ... 28

15, ..., 28 - выигрышные позиции с первого хода

* б) Ваня может выиграть первым ходом (как бы ни играл Петя), если в куче будет S = 14 камней. Тогда после первого хода Пети в куче будет 15 или 28 камней. В обоих случаях Ваня удваивает кучу и выигрывает в один ход.

S = 14

Петя: 14 + 1 = 15 выигрышная позиция (см. п. а). Выигрывает Ваня

Петя: 14 \* 2 = 28 выигрышная позиция (см. п. а). Выигрывает Ваня

14 - проигрышная позиция

Задание 20.

* Возможные значения **S: 7, 13**. В этих случаях Петя, очевидно, не может выиграть первым ходом. Однако он может получить кучу из 14 камней: в первом случае удвоением, во втором - добавлением одного камня. Эта позиция разобрана в п. 1б. В ней игрок, который будет ходить (теперь это Ваня), выиграть не может, а его противник (то есть Петя) следующим ходом выиграет.

S = 7

Петя: 7 \* 2 = 14 проигрышная позиция (см. п. 1 б). Выигрывает Петя

S = 13

Петя: 13 + 1 = 14 проигрышная позиция (см. п. 1 б). Выигрывает Петя

7, 13 - выигрышные позиции со второго хода

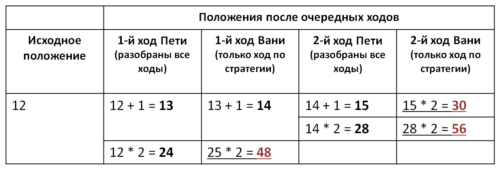
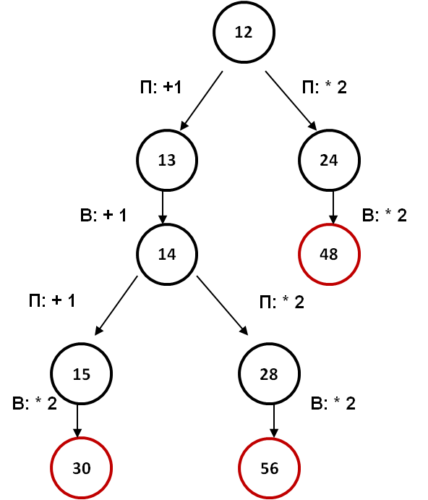
Задание 21.

* Возможные значения **S: 12**. После первого хода Пети в куче будет 13 или 24 камня. Если в куче их станет 24, Ваня удвоит количество камней и выиграет первым ходом. Ситуация, когда в куче 13 камней, разобрана в п. 2. В этой ситуации игрок, который будет ходить (теперь это Ваня), выигрывает своим вторым ходом.

S = 12

Петя: 12 + 1 = 13

Ваня: 13 + 1 = 14 проигрышная позиция (см. п. 1 б). Выигрывает Ваня **вторым** ходом!

В таблице изображено дерево возможных партий (и только их) при описанной стратегии Вани. Заключительные позиции (в них выигрывает Ваня) подчеркнуты. На рисунке это же дерево изображено в графическом виде.  
[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/2017/07/1-21.png)  
Дерево всех партий, возможных при стратегии Вани:  
[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/2017/07/1-23.png)  
\* красный круг означает выигрыш

19\_4: **Досрочный егэ по информатике 2018, вариант 1. Задание 19 (26):**

Два игрока, Паша и Вася, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, **первый ход делает Паша**. За один ход игрок может добавить в кучу **один** или **четыре**камня или **увеличить количество камней в куче в пять раз**. Игра завершается в тот момент, когда количество камней **в куче становится не менее 69**.  
Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 69 или больше камней. В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 68.

Задание 19 ЕГЭ.  
**а)** Укажите все такие значения числа S, при которых Паша может выиграть в один ход. Обоснуйте, что найдены все нужные значения S, и укажите выигрывающий ход для каждого указанного значения S.  
    
**б)**Укажите такое значение S, при котором Паша не может выиграть за один ход, но при любом ходе Паши Вася может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Васи.  
    
Задание 20 ЕГЭ. Укажите 2 таких значения S, при которых у Паши есть выигрышная стратегия, причём Паша не может выиграть за один ход и может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Вася. Для каждого указанного значения S опишите выигрышную стратегию Паши.  
   
Задание 21 ЕГЭ. Укажите хотя бы одно значение S, при котором у Васи есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Паши, и у Васи нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом. Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Васи. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Васи (в виде рисунка или таблицы).  
    
[Типовые задания для тренировки](https://labs-org.ru/ege-19-training-4/" \t "_blank)

**Решение:**

**19.**  
а) **S ≥ 14**. При количестве камней в куче от 14 и выше Паше необходимо увеличить их количество в пять раз, тем самым получив 70 или более камней.

S ≥ 14 выигрышные позиции

б) **S = 13**. Паша своим первым ходом может сделать 14, 17 или 65 камней, после этого Вася увеличивает количество в пять раз, получая 70, 85 или 325 камней в куче.

S = 13

Паша 1 ход: 13 + 1 = 14

Паша 1 ход: 13 + 4 = 17

Паша 1 ход: 13 \* 5 = 65

Ваня 1 ход: [14, 17, 65] \* 5 = S ≥ 14 Ваня выигрывает

13 - проигрышная позиция

**20.** **S = 9, 12**. Для данных случаев Паше необходимо прибавить 4 камня к куче из 9 камней, либо 1 камень к куче из 12, и получить кучу из 13 камней.  
После чего игра сводится к стратегии, описанной в пункте 1б.

S = 13

Паша 1 ход: 9 + 4 = 13 Паша выигрывает

Паша 1 ход: 12 + 1 = 13 Паша выигрывает

9, 12 - выигрышные позиции со второго хода

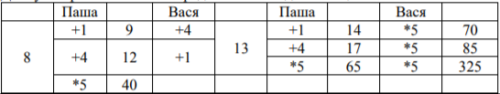
**21.** **S = 8**. Своим первым ходом Паша может сделать количество камней в куче 9, 12 или 40. Если Паша увеличивает кол-во в пять раз, тогда Вася выигрывает своим первым ходом, увеличивая количество камней в пять раз.  
Для случая 9 и 12 камней Вася использует стратегию, указанную в п.2.

S = 8

Паша 1 ход: 8 + 1 = 9 Ваня Выигрывает (см. п.2)

Паша 1 ход: 8 + 4 = 12 Ваня Выигрывает (см. п.2)

Паша 1 ход: 8 \* 5 = 40

[](https://labs-org.ru/wp-content/uploads/2017/07/1-24.png)

def F(s1, s2, c, Max):  
 if s1+s2>=77:  
 return c % 2 == Max % 2  
 if c>=Max and s1<77:  
 return 0  
 if c % 2 != Max % 2:  
 return F(s1+1,s2, c+1, Max) or F(s1\*2,s2, c+1, Max) or F(s1,s2+1, c+1, Max) or F(s1,s2\*2, c+1, Max)  
 else:  
 return F(s1+1,s2, c+1, Max) and F(s1\*2,s2, c+1, Max) and F(s1,s2+1, c+1, Max) and F(s1,s2\*2, c+1, Max)  
for s in range(1,69+1):  
 for j in range(1,10):  
 if F(s,7,0,j):  
 if j==4:  
 print(s, j)  
 break  
  
  
  
'''def F(s1, c, Max):  
 if s1>=25:  
 return c % 2 == Max % 2  
 if c>=Max and s1<25:  
 return 0  
 if c % 2 != Max % 2:  
 return F(s1+2, c+1, Max) or F(s1\*2, c+1, Max)  
 else:  
 return F(s1 + 2, c + 1, Max) and F(s1 \* 2, c + 1, Max)  
for s in range(1,24+1):  
 for j in range(1,100):  
 if F(s,0,j):  
 print(s, j)  
 break'''

**Тип 21 № [27418](https://inf-ege.sdamgia.ru/problem?id=27418)**

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень** или **увеличить количество камней в куче в два раза**. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 5 камней; такую позицию в игре будем обозначать (10, 5). Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций: (11, 5), (20, 5), (10, 6), (10, 10). Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 77. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т. е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 77 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было семь камней, во второй куче  — *S* камней; 1 ≤ *S* ≤ 69.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока  — значит, описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии не следует включать ходы играющего по этой стратегии игрока, не являющиеся для него безусловно выигрышными, т. е. не являющиеся выигрышными независимо от игры противника.

Найдите минимальное значение *S*, при котором одновременно выполняются два условия:

— у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

— у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

def igra (x, y, h):  
 if x+y>=77 and (h==3 or h==5):  
 return 1  
 if x+y>77 and h<5:  
 return 0  
 if x+y<=77 and h==5:  
 return 0  
 else:  
 if h%2==0:  
 return igra(x+1,y,h+1) or igra(x,y+1,h+1) or igra(x\*2,y,h+1) or igra(x,y\*2,h+1)  
 if h%2==1:  
 return igra(x+1,y,h+1) and igra(x,y+1,h+1) and igra(x\*2,y,h+1) and igra(x,y\*2,h+1)  
  
def igra1 (x, y, h):  
 if x+y>=77 and (h==3):  
 return 1  
 if x+y>77 and h<5:  
 return 0  
 if x+y<=77 and h==5:  
 return 0  
 else:  
 if h%2==0:  
 return igra(x+1,y,h+1) or igra(x,y+1,h+1) or igra(x\*2,y,h+1) or igra(x,y\*2,h+1)  
 if h%2==1:  
 return igra(x+1,y,h+1) and igra(x,y+1,h+1) and igra(x\*2,y,h+1) and igra(x,y\*2,h+1)  
for i in range(1,69):  
 if igra(7,i,1):  
 print(7,i)  
for i in range(1,69):  
 if igra1(7,i,1):  
 print(7,i)